

一种自适应小波去噪算法

何焰兰, 苏 勇, 高永楣

(国防科技大学应用物理系, 长沙 410073)

摘 要: Donoho 和 Johnstone 的多分辨率小波去噪法在数字信号处理方面已成为非常有用的工具, 但是通常情况下选取低分辨率截段参数 j_0 是很困难的, 需要源信号的某些正则性. 对于一给定的未知信号和噪声指数 σ , 哪一个 j_0 是最佳的呢? 本文对于任意波形的信号构造了一个统计量, 用于建立一个寻找最佳 j_0 值的自适应方法, 并对其统计特性进行了分析, 大量的仿真计算结果表明, 该算法确实非常准确有效, 因此使得多分辨率去噪法有了更广泛的应用背景.

关键词: 小波去噪; 波形恢复; F-分布

中图分类号: TN011.72

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112 (2000) 10-0138-03

A Adaptive Wavelet Denoising Algorithm

HE Yan-lan, SU Yong, GAO Yong-mei

(Institute of Applying Physics, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: Wavelet denoising of Donoho and Johnstone in multiresolution approximation has been evolved to become very powerful tools for digital signal processing. But the determining of the parameter j_0 , the low-resolution cutoff, is difficult in general case. It needs some regularities of the source signal. Which j_0 is the best for a given unknown signal and a noise power σ ? In this paper, we construct a statistic for looking for the best j_0 adaptively. We analyze the properties of the statistic and give many simulation results. This adaptive method makes the scope of application of the wavelet denoising more widely.

Key words: wavelet denoising; waveform restoration; F-distribution

1 最佳 j_0 值的确定与分析

在 Donoho 和 Johnstone 提出的通过选择适当小波系数重构的空间适应^[1]去噪算法中, 必须首先确定一个低分辨率截断参数 j_0 值.

对于一具有噪声指数 σ 的给定信号 $s(t)$, 哪一个 j_0 是最佳的呢? 通常情况下回答这个问题是很困难的, 尤其是对于无任何先验知识的信号来说. 但是, 在多分辨率去噪法中, j_0 确实是个相当重要的量, 选取不同的 j_0 , 去噪后的信噪比有明显的差异, 如果选取得不恰当, 则有可能达不到理想的去噪效果, 甚至扭曲原信号. 一般来说, 相应于任一信号都有一个最佳的 j_0 值. 参见文[2]中所述结论.

一个源信号 $s(t)$, 被一加性噪声污染, 则数字接收输出 x 可用下列方程表示:

$$x_i = s(t_i) + e_i, (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

这里, $t_i = i/n$, e_i 是独立同分布 $N(0, \sigma^2)$, $s(\cdot)$ 是需要恢复的未知函数. Donoho 和 Johnstone 所描述的空间适应法原则指出, 对于一般的函数来说, 大部分行为集中在小波空间 (j, i) 的一小分子子集内, 而在噪声模型式(1)下, 噪声污染了所有的小波系数, 且贡献相等, 如果噪声向量是高斯形式的, 则它的正交变换 $z = We$ 也将是高斯形式的, 经验小波系数为

$$d_{j,i} = \theta_{j,i} + z_{j,i}$$

这里 $\theta = Ws$ 是无噪声数据 $s = (s(t_i))_{i=0}^{n-1}$ 的小波变换, 进行小波变换后的系数排序如图 1 所示.

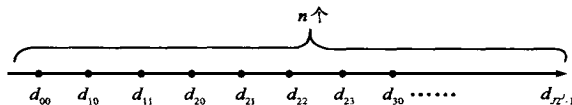


图1 小波系数排序图

每一个经验小波系数, 都对噪声偏差 σ^2 有贡献, 仅仅很小一部分的小波才对信号有贡献. 这种方法的实质, 使我们想到能构造一个统计量 I , 用它来确定 j_0 的最佳值.

Donoho 和 Johnstone 对这种小波变换后的系数所描述的性质使我们小波系数分布有了认识, 可以认为在 j 较大时, 小波系数主要由噪声控制 (尤其是当采样点数 n 较大时), 所以对于任何具有 σ 采样数目为 n 的被高斯噪声污染的未知信号, 通过计算 $j = \log_2 n - 1$ 分辨率上最后一些系数的 σ , 并认为它是附加高斯噪声信号的 σ 值, 这样可定义如下的量, 由式(1)知:

$$d = Wx = Ws + We = d_s + d_e \quad (2)$$

写成向量形式有:

$$\begin{pmatrix} d^1 \\ \vdots \\ d^{2^{j_0}} \\ d^{2^{j_0}+1} \\ \vdots \\ d^k \\ \vdots \\ d^{2^{J+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_s^1 \\ \vdots \\ d_s^{2^{j_0}} \\ d_s^{2^{j_0}+1} \\ \vdots \\ d_s^k \\ \vdots \\ d_s^{2^{J+1}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_e^1 \\ \vdots \\ d_e^{2^{j_0}} \\ d_e^{2^{j_0}+1} \\ \vdots \\ d_e^k \\ \vdots \\ d_e^{2^{J+1}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中 $n = 2^{J+1}$, 由 Donoho 和 Johnstone 描述的性质知, 当 $k \leq 2^{j_0}$ 时, 小波系数 d 须全部保留, 而当 $k > 2^{j_0}$ 后, 由性质 2 知, 当 $i2^{-j} \simeq t, j = j_0, \dots, J+1$ 处的小波系数较大时, 才有意义, 而这样的系数极少, 大多数源信号的小波系数在 $k > 2^{j_0}$ 后为零. 即 d 几乎完全由噪声决定, 并且 2^{J+1} 越大, 这种结论更加精确, 亦即

$$d^j = d_e^j, \text{ 当 } j > J \text{ 时} \quad (4)$$

设 e 为高斯独立同分布噪声, 则 $e \sim N(0, \sigma^2 I_{2^{J+1}})$, 由于小波变换的正交性, 有 $d_e \sim N(0, \sigma^2 I_{2^{J+1}})$.

设 $J = \log_2 n - 1$ 分辨率上最末 n_1 个数的系数向量为 d_{e_1} 且 $n_1 < 2^{J+1} - 2^j$, 它满足: $d_{e_1} \sim N(0, \sigma^2 I_{n_1})$, 因此, 通过计算这 n_1 个系数的 σ_1^2 值, 并将它作为 σ 的估计值, 记为 σ (已由仿真模拟计算证实过).

定理 1 设总体 ζ 服从正态 $N(\alpha_1, \sigma^2)$, $\zeta_1, \dots, \zeta_{n_1}$ 为其子样, 总体 η 服从正态 $N(\alpha_2, \sigma^2)$, $\eta_1, \dots, \eta_{n_2}$ 为其子样, 而且这两个子样是互相独立的. 记

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} \zeta_i, S_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (\zeta_i - \bar{\zeta})^2 \quad (5)$$

$$\bar{\eta} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \eta_j, S_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} (\eta_j - \bar{\eta})^2 \quad (6)$$

则有

$$\frac{(n_2 - 1) n_1 S_1^2}{(n_1 - 1) n_2 S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1) \quad (7)$$

定义如下序列:

$$\zeta: d^{2^{j_0}+1}, d^{2^{j_0}+2}, \dots, d^{2^{J+1}};$$

$$\eta: d^{2^{J+1}}, d^{2^{J+2}}, \dots, d^{2^{J+1}};$$

其中 $2^{J+1} = n$, 并且 ζ 服从 $N(\alpha_1, \sigma^2)$, 因此 η 也服从 $N(\alpha_1, \sigma^2)$. 设 η 为 η 的最后 n_1 个系数的子样, $n_1 < 2^{J+1} - 2^j$, 令

$$A = 2^{J+1} - n_1$$

则

$$\eta_1: d^{A+1}, d^{A+2}, \dots, d^{A+n_1}$$

$$\zeta_j: d^{2^{j-1}+1}, d^{2^{j-1}+2}, \dots, d^j, j = j_0 + 1, j_0 + 2, \dots, J;$$

显然 ζ_j 与 η_k 这两个子样是相互独立的, 又设 $N_j = 2^j - 2^{j-1}$, 在程序里已假定 $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, 记:

$$S_1^2 = \frac{1}{N_j} \sum_{k=1}^{N_j} d^{2^{j-1}+k}, j = j_0 + 1, j_0 + 2, \dots, J \quad (9)$$

$$S_2^2 \simeq \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} d^{A+i}, A = 2^{J+1} - n_1 \quad (10)$$

则由定理 1 知:

$$\frac{(n_1 - 1) N_j S_1^2}{(N_j - 1) n_1 S_2^2} \sim F(N_j - 1, n_1 - 1) \quad (11)$$

因为实际上有 $N_j, n_1 \gg 1$, 因此有

$$S_1^2 / S_2^2 \sim F(N_j, n_1) \quad (12)$$

有以上分析作为基础, 则可对其进行如下方差检验:

$H_0: 2^{j-1} \sim 2^j$ 序号的系数中基本不含信号的有效成分, 即大系数数目少;

$H_1: 2^{j-1} \sim 2^j$ 序号的系数中信号的有效成分较多, 即大系数数目大; 或者: $H_0: \sigma^2 = \sigma^2, H_1: \sigma^2 \neq \sigma^2$. 现在可以构造一个统计量 $I(j)$, 用 F 检验法来进行显著性检验,

$$I(j) = S_1^2 / S_2^2$$

检验中, 取显著水平 $\alpha =$

0.01, 此时, 从 F 分布表上查得 $F_{1-\alpha}(N_j, n_1) = 2.0$, 取 $n_1 = 150$, (当 $n < 1024$ 时, n_1 实际上取得小些). 当 $I(j) > \alpha$ 时, 否定 H_0 , 亦即 $2^{j-1} \sim 2^j$ 序号的系数中含有信号的有效成份, 否则接受 H_0 , 以此来确定最佳 j_0 值, 对不同函数进行自适应去噪的整个流程图如图 2 所示.

从 $j = J - 1 = \log_2 n - 2$ 开始计算, 如果 $I(j) > \alpha$, 取 $j_0 = j$, 否则再令 $j = j - 1$, 继续进行检验, 一直到满足 $I(j) > \alpha$ 为止, 求出 j_0 的估计值 $\hat{j}_0$.

图 2 小波分解去噪自适应算法流程图

2 仿真结果与结论

选取七种特殊信号

示于图 3 中, 并在七种源信号上叠加不同指数 σ 的高斯噪声后, 对其进行仿真计算, 由此所得的 j_0 值的确与最佳 j_0 值相当一致, 图 4 显示了在不同信噪比与不同采样数目下实际最佳 j_0 值与由上述方法计算出来的 j_0 值的差值图形, 可以看出在 $n = 2^7, 2^8, \dots, 2^{15}$ 这几个不同的采样点数上都吻合得相当好. 限于篇幅, 图 4 只显示了 Blocks 函数情形, 其余 6 种图形结果也一样. 图 5 显示的是在信噪比均为 3.7dB 时计算与实际最佳 j_0 值随 J 值变化的差异图, 吻合得也很好.

这种算法的物理实质就是将分解后的每一个小波系数看作是“能量元, 由于正交镜像滤波分解的高斯噪声的小波“能量元”是均匀分布于整个小波系数轴上的, 而携带信号信息的小波“能量元”只有极少数, 如果信号的信噪比值不是太小, 则

携带信号信息的小波“能量元”数值上一般都大于噪声“能量元”,因此用二者“能量元”之比来确定最佳 j_0 值是合情合理的,由对七种信号处理中常见的信号模拟计算来看,通用性很

强,并且,携带信号信息的小波“能量元”越集中于小波变换系数轴的前端,噪声“能量元”并被去掉得更多,这种去噪方法的效果也更好。

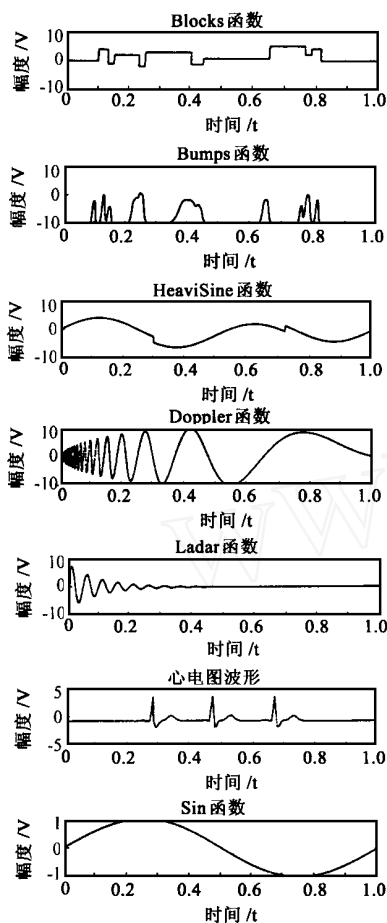


图 3

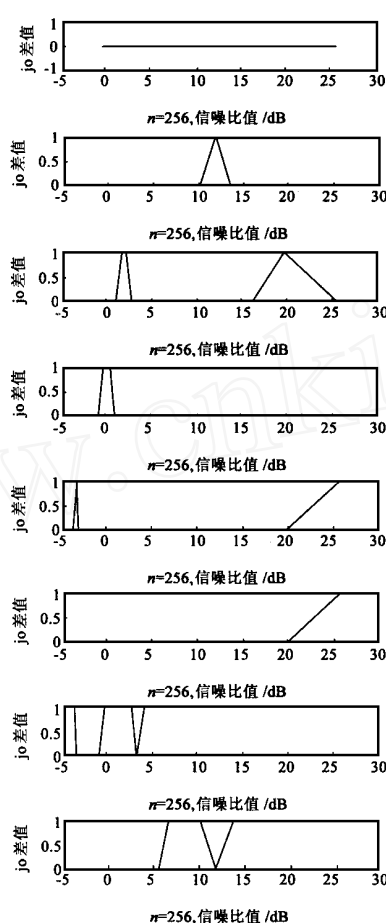
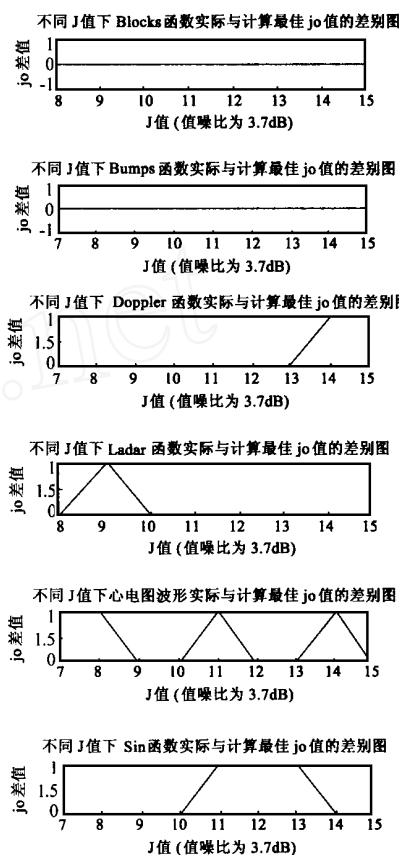
图 4 不同信噪比下 Blocks 函数计算与实际 j_0 值之间的差值图

图 5

总之本文提出了一个 Donoho 和 Johnstone 软门限的小波去噪法中最佳 j_0 值的确定方法,通过对一个自己构造的统计量 I 进行计算比较,使得在通常情况下,对任意被加性噪声污染的未知信号均可自适应地去噪。可以看出,无论采样点数 n 与信号信噪比怎样变化,在一定范围里,该算法都可以自动地给出一个最佳的 j_0 值,使此时的风险率值达到最小,文章中给出的大量仿真结果表明,该方法是切实有效的,算法非常简单且易于实现,在取这种 j_0 情况下去噪,效果最佳。

参考文献:

- [1] Donoho and Johnstone. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage, Biometrika [J]. 1994, 81(3): 425 - 455.
- [2] 何焰兰,苏勇等.对 DJ 小波 Visrshrink 去噪法中 j_0 取值的分析[J].国防科技大学学报,1998,6.
- [3] P. C. Ching and S. Q. Wu. On Approximated Sampling Theorem and Wavelet Denoising for Arbitrary Waveform Restoration [Z]. 1995.

- [4] Daubechies, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets [J]. Commun. Pure Appl. 1998, 41: 909 - 996.
- [5] Daubechies. Ten Lectures on Wavelets [Z]. Philadelphia SIAM, 1998.
- [6] Pak Chun Ching Shquan Wu. Quadrature Mirror Filter Decomposition and Multiresolution Approximation [M]. 1994.
- [7] 中山大学数学力学系. 概率论及数量统计 [M]. 人民教育出版社.

作者简介:



后.

何焰兰 出生于 1962 年 7 月,1979 年就读于北京大学无线电电子学系波谱学与量子电子学专业.1983 年毕业后,在国防科技大学应用物理系工作,1985 年在该校,该系攻读硕士学位,专业方向为微弱信号检测.1995 年至 1998 年继续攻读该专业方向的博士学位,于 1999 年 10 月在国防科技大学 ATR 国家重点实验室攻读博士